

KESTABILAN SOLUSI EKUILIBRIUM MODEL PENYEBARAN PENYAKIT TIPE SIR DENGAN PENAMBAHAN KOMPARTEMEN VAKSINASI

Joko Harianto¹ dan Titik Suparwati²

^{1,2}Jurusan Matematika FMIPA Universitas Cenderawasih

email: joharijpr@gmail.com¹

email: tix_az@ymail.com²

Abstrak. Dalam kajian ini, dikembangkan sebuah model penyebaran penyakit (epidemi) tipe *SIR* dengan penambahan kompartemen vaksinasi yang disebut juga sebagai model *SVIR*. Kompartemen *V* (Vaksinasi) merupakan kelas individu-individu yang divaksin. Dalam model ini diasumsikan bahwa individu yang telah divaksin mendapatkan sebagian kekebalan hingga waktu tertentu dari penyakit tertentu. Pada model ini akan ditentukan bilangan reproduksi dasar (*basic reproduction number*) R_0 sebagai parameter untuk meninjau perilaku penyebaran suatu penyakit yang dibahas. Dari hasil analisis model ini akan diperoleh suatu nilai R_0 . Masing-masing parameter R_0 tersebut menentukan kestabilan dari titik-titik ekuilibrium model yang dibahas. Kestabilan tersebut akan memberikan interpretasi tentang perilaku atau pola penyebaran penyakit yang sedang dibahas.

Kata kunci: vaksinasi, model *SVIR*, kestabilan *SVIR*.

1. PENDAHULUAN

Vaksinasi (*vaccination*) merupakan suatu proses memasukan bakteri atau virus pathogen yang telah dilemahkan atau dimatikan kepada individu, manusia atau hewan yang masih sehat, sehingga membentuk suatu kekebalan yang dapat melawan bakteri pathogen/virus tersebut.

Cara kerja vaksin adalah merangsang sistem kekebalan tubuh terhadap virus/bakteri yang telah dilemahkan, darah putih yang dinamakan *B-lymphocytes* membuat antibody yang didesain bergabung dengan antigen (WHO, 2005). Sistem kekebalan didesain untuk mengembalikan kekebalan adaptif terhadap suatu penyakit. Sehingga, ketika ada virus/bakteri yang sama menyerang tubuh, maka tubuh akan membentuk pertahanan sendiri. Vaksinasi dapat menjaga kekebalan tubuh untuk beberapa tahun atau sampai seumur hidup. Jadi, vaksinasi merupakan salah satu cara untuk mencegah penyebaran penyakit kepada individu, baik manusia ataupun hewan.

Beberapa penyakit yang dapat dikurangi penyebarannya dengan pemberian vaksin, diantaranya polio, tetanus, TBC, diptera, hepatitis-B, dan sejenisnya. Proses vaksinasi dapat diberikan dalam jangka waktu tertentu dan dengan dosis tertentu, tergantung dari jenis penyakit dan jenis vaksin yang diberikan. Jangka waktu dan dosis pemberian vaksin harus dipertimbangkan dalam jangka waktu yang tetap dan dosis yang tepat.

Penerapan model matematika dan teknik matematika untuk mendalami masalah *biosciences* dipelajari dalam *mathematical biosciences*. Salah satu cabang *mathematical biosciences* adalah *mathematical epidemiology*. *Mathematical epidemiology* mempelajari tentang model penyebaran dan pengendalian penyakit. Penyebaran penyakit disebut juga epidemi. Mempelajari model epidemi yang didalamnya termasuk penyakit penyebab kematian pada suatu populasi yang berubah merupakan hal penting dalam *mathematical epidemiology*.

Menurut Kermack dan McKendrick (1927), penyebaran infeksi penyakit dapat dideskripsikan secara matematis melalui pembagian model, misalnya model *SIR* dan model *SIRS*. Vaksinasi dapat dianggap sebagai penambahan kelas secara alami kedalam model dasar epidemik untuk beberapa jenis penyakit. Oleh karena itu, rumusan masalah dalam kajian ini, yaitu bagaimana memformulasikan model penyebaran penyakit dengan penambahan kompartemen vaksinasi yang sering disebut sebagai model *SVIR*. Selanjutnya, bagaimanakah perilaku dan pola penyebaran penyakit dari hasil analisis model *SVIR* tersebut.

2. METODOLOGI

Penelitian ini menggunakan metode studi literatur dan menggunakan software matematika untuk membuat simulasi model. Data yang digunakan dalam penelitian ini menggunakan data sekunder yang diperoleh dari jurnal-jurnal internasional terakreditasi. Berikut ini adalah tahapan-tahapan yang akan dilakukan dalam penelitian ini : (1) Mengkaji model epidemi *SVIR* berdasarkan asumsi-asumsi yang diberikan. (2) Memformulasikan model matematika penyebaran epidemi *SVIR*. (3) Menentukan solusi/ titik ekuilibrium model *SVIR*. (4) Menentukan parameter bilangan reproduksi dasar (*basic reproduction number*) R_0 . (5) Menganalisis kestabilan titik ekuilibrium model *SVIR*. (6) Mendeskripsikan perilaku dan pola penyebaran penyakit berdasarkan hasil analisis kestabilan model *SVIR*.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

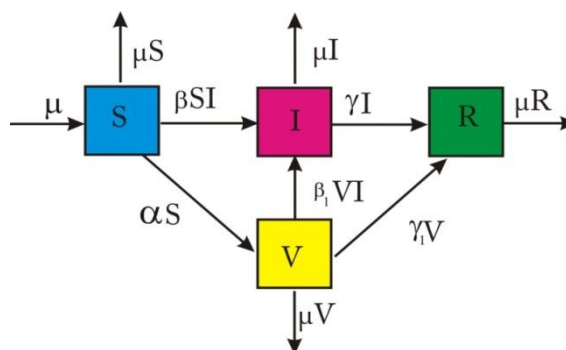
3.1 Formulasi Model

Untuk memodelkan *SVIR* epidemi suatu penyakit dengan kendali vaksinasi, terlebih dahulu akan dibangun asumsi-asumsi yang digunakan untuk membatasi dan memperjelas masalah yang akan dimodelkan. Asumsi yang digunakan sebagai berikut : (1) Populasi tertutup (tidak ada migrasi). (2) Terjadi kematian alami pada semua subpopulasi dengan laju yang sama. (3) Penyakit tidak fatal, sehingga tidak ada kematian karena penyakit yang sedang dibicarakan. (4) Individu yang sembuh tidak dapat kembali ke kelas rentan (kesembuhan permanent). (5) Masa inkubasi singkat. (6) Vaksinasi diterapkan pada subpopulasi rentan. (7) Laju kesembuhan anak yang terinfeksi tidak dibedakan dengan orang dewasa. (8) Vaksinasi akan mencapai tingkat kekebalan sejalan dengan waktu dan pada akhirnya masuk dalam subpopulasi sembuh. (9) Individu yang divaksin akan kehilangan imunitas apabila terjadi kontak dengan individu yang terinfeksi. (10) Transmisi penyakit terjadi akibat adanya kontak antara individu yang terinfeksi dengan individu rentan, ataupun individu terinfeksi dengan tervaksin. (11) Laju kelahiran terjadi disetiap subpopulasi dan masuk pada subpopulasi rentan.

Berdasarkan asumsi yang disebutkan sebelumnya, maka untuk membangun model dinotasikan hal-hal sebagai berikut :

(1) $\frac{dS}{dt}$ = laju perubahan subpopulasi rentan per satuan waktu; (2) $\frac{dV}{dt}$ = laju perubahan subpopulasi tervaksin per satuan waktu; (3) $\frac{dI}{dt}$ = laju perubahan subpopulasi terinfeksi per satuan waktu; (4) $\frac{dR}{dt}$ = laju perubahan subpopulasi sembuh per satuan waktu; (5) S = proporsi individu rentan , dengan $S \geq 0$; (6) V = proporsi individu tervaksin ,dengan $V \geq 0$; (7) I = proporsi individu terinfeksi ,dengan $I \geq 0$; (8) R = proporsi individu sembuh ,dengan $R \geq 0$ (9) μ = laju kelahiran/kematian, dengan $\mu > 0$; (10) β = laju transmisi (laju kontak) penyebaran oleh individu yang terinfeksi, dengan $\beta > 0$; (11) β_1 = laju transmisi individu yang masih memiliki kemungkinan terinfeksi sebelum memperoleh kekebalan setelah tervaksinasi, dengan $\beta_1 > 0$; (12) γ = laju kesembuhan, dengan $\gamma > 0$; (13) γ_1 = laju rata-rata bagi individu yang mengalami proses vaksinasi untuk memperoleh kekebalan , dengan $\gamma_1 > 0$; (14) α = laju dimana individu yang rentan berpindah menjadi individu yang tervaksinasi, dengan $\alpha > 0$.

Berikut disajikan diagram transmisi dari model epidemi *SVIR* dengan kendali vaksinasi adalah :



Gambar 1. Diagram Transmisi Model *SVIR*

Berdasarkan asumsi dan pemisalan parameter di atas, diperoleh model SVIR dalam bentuk persamaan diferensial sebagai berikut :

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= \mu - \mu S - \beta SI - \alpha S \\ \frac{dV}{dt} &= \alpha S - \beta_1 VI - \gamma_1 V - \mu V \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI + \beta_1 VI - \gamma I - \mu I \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma_1 V + \gamma I - \mu R\end{aligned}$$

dimana , $S + V + I + R = 1$, untuk setiap $t \geq t_0$.

3.2 Analisis Titik Ekuilibrium Sistem

Karena persamaan terakhir tidak mempengaruhi persamaan yang lainnya, maka sistem diatas dapat dieliminir menjadi :

$$\frac{dS}{dt} = \mu - \mu S - \beta SI - \alpha S \quad (1)$$

$$\frac{dV}{dt} = \alpha S - \beta_1 VI - \gamma_1 V - \mu V \quad (2)$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta SI + \beta_1 VI - \gamma I - \mu I \quad (3)$$

Selanjutnya, analisis kestabilan model SVIR tersebut akan dilakukan disekitar titik ekuilibrium nya, sehingga sebagai langkah pertama akan ditentukan terlebih dulu titik-titik ekuilibrium sistem, yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik.

Titik ekuilibrium bebas penyakit adalah titik dimana penyakit tidak mungkin menyebar pada suatu daerah karena jumlah populasi terinfeksi sama dengan nol ($I=0$) untuk $t \rightarrow \infty$, sedangkan titik ekuilibrium endemik adalah titik dimana penyakit pasti menyebar ($I > 0$) untuk $t \rightarrow \infty$, pada suatu daerah tertutup yang telah didefinisikan.

Teorema 1

Titik ekuilibrium dari sistem (1)-(3) terdiri atas 2, yaitu :

- (1) Titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu $E_0 = (S_0, V_0, I_0) = (\frac{\mu}{\alpha+\mu}, \frac{\alpha\mu}{(\alpha+\mu)(\gamma_1+\mu)}, 0)$
- (2) Titik ekuilibrium Endemik yaitu $E^* = (S^*, V^*, I^*) = (\frac{\mu}{(\alpha+\mu+\beta I^*)}, \frac{\alpha\mu}{(\alpha+\mu+\beta I^*)(\mu+\gamma_1+\beta_1 I^*)}, I^*)$,
dengan I^* dalam bentuk akar positif dari : $A_1 I^2 + A_2 I + A_3(1-C) = 0$, untuk $C > 1$.
dimana : $A_1 = (\gamma + \mu)(\beta_1\beta)$, $A_2 = (\gamma + \mu)[(\alpha + \mu) \cdot \beta_1 + (\gamma_1 + \mu) \cdot \beta] - \beta_1\beta\mu$
 $A_3 = (\gamma + \mu)(\alpha + \mu)(\gamma_1 + \mu)$

Bukti:

Titik ekuilibrium sistem (1)-(3) diperoleh saat $\frac{dS}{dt} = 0, \frac{dV}{dt} = 0, \frac{dI}{dt} = 0$, yang berakibat :

$$\mu - \mu S - \beta SI - \alpha S = 0 \quad (4)$$

$$\alpha S - \beta_1 VI - \gamma_1 V - \mu V = 0 \quad (5)$$

$$\beta SI + \beta_1 VI - \gamma I - \mu I = 0 \quad (6)$$

Dari persamaan (6), diperoleh : $I(\beta S + \beta_1 V - \gamma - \mu) = 0$, dengan penyelesaian : $I = 0$ atau $\beta S + \beta_1 V - \gamma - \mu = 0$, sehingga dari sini diperoleh 2 keadaan, yaitu :

a) Keadaan saat $I = 0$

Keadaan ini tidak lain merupakan syarat perlu kondisi titik ekuilibrium bebas penyakit, sehingga dari persamaan (4) diperoleh bentuk : $\mu - \mu S - \alpha S = 0$ maka $S = \frac{\mu}{\alpha+\mu}$. Dari

persamaan (5) diperoleh : $\alpha S - \gamma_1 V - \mu V = 0 \Leftrightarrow V = \frac{\alpha\mu}{(\alpha+\mu)(\gamma_1+\mu)}$. Sehingga diperoleh titik ekuilibrium bebas penyakit yaitu $E_0 = (S_0, V_0, I_0) = (\frac{\mu}{\alpha+\mu}, \frac{\alpha\mu}{(\alpha+\mu)(\gamma_1+\mu)}, 0)$. ■

b) Keadaan saat $I \neq 0$, atau $I > 0$,

Keadaan ini tidak lain merupakan syarat perlu kondisi titik ekuilibrium endemik. Perhatikan bahwa : Dari Persamaan (4) diperoleh bentuk : $\mu - \mu S - \beta SI - \alpha S = 0$, maka $S^* = \frac{\mu}{(\alpha+\mu+\beta I^*)}$.

Dari Persamaan (5) diperoleh : $\alpha S - \beta_1 VI - \gamma_1 V - \mu V = 0$, maka $V^* = \frac{\alpha\mu}{(\alpha+\mu+\beta_1 I^*)(\gamma_1+\mu+\beta_1 I^*)}$. Berdasarkan (6), telah diperoleh bahwa jika $I \neq 0$, maka yang terjadi adalah $\beta S + \beta_1 V - \gamma - \mu = 0$, sehingga dengan substitusi S^* dan V^* akan diperoleh :

$$\begin{aligned} \frac{\alpha\mu\beta_1}{(\alpha+\mu+\beta_1 I^*)(\gamma_1+\mu+\beta_1 I^*)} &= \mu + \gamma - \frac{\beta\mu}{(\alpha+\mu+\beta_1 I^*)} \\ \alpha\mu\beta_1 &= (\mu+\gamma)(\alpha+\mu+\beta_1 I^*)(\gamma_1+\mu+\beta_1 I^*) - \beta\mu(\gamma_1+\mu+\beta_1 I^*) \\ [\mu^2(\mu+\gamma) + \mu\gamma_1(\mu+\gamma) + \mu\beta_1 I^*(\mu+\gamma) + \alpha\mu(\mu+\gamma) + \alpha\gamma_1(\mu+\gamma) + \alpha\beta_1 I^*(\mu+\gamma) + \mu\beta_1 I^*(\mu+\gamma) + I^*\beta\gamma_1(\mu+\gamma) + I^{*2}\beta_1\beta(\mu+\gamma)] &- [\beta\mu(\mu+\gamma_1) + \beta_1\beta\mu I^* + \beta_1\mu\alpha] = 0 \\ I^{*2}\beta_1\beta(\mu+\gamma) + [(\mu+\gamma)\{(\alpha+\mu)\beta_1 + (\mu+\gamma_1)\beta\} - \beta_1\beta\mu]I^* &+ (\mu+\gamma)(\mu+\gamma_1)(\alpha+\mu) \left[1 - \left\{ \frac{\beta\mu}{(\alpha+\mu)(\gamma+\mu)} + \frac{\alpha\beta_1\mu}{(\alpha+\mu)(\gamma+\mu)(\mu+\gamma_1)} \right\} \right] = 0 \end{aligned}$$

Dengan memisalkan :

$$A_1 = (\gamma + \mu)(\beta_1\beta) > 0, A_2 = (\gamma + \mu)[(\alpha + \mu)\beta_1 + (\gamma_1 + \mu)\beta] - \beta_1\beta\mu$$

$$A_3 = (\gamma + \mu)(\alpha + \mu)(\gamma_1 + \mu) > 0, C = \frac{\beta\mu}{(\alpha+\mu)(\gamma+\mu)} + \frac{\alpha\beta_1\mu}{(\alpha+\mu)(\gamma+\mu)(\mu+\gamma_1)}.$$

Sehingga persamaan diatas menjadi : $A_1 I^2 + A_2 I + A_3(1 - C) = 0$.

Adapun akar-akar persamaannya : $I_{12}^* = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_1 A_3(1-C)}}{2A_1}$, dengan syarat $C > 1$, maka diambil akar I^* yang positif. Jadi, diperoleh titik ekuilibrium endemik yaitu $E^* = (S^*, V^*, I^*) = \left(\frac{\mu}{(\alpha+\mu+\beta_1 I^*)}, \frac{\alpha\mu}{(\alpha+\mu+\beta_1 I^*)(\mu+\gamma_1+\beta_1 I^*)}, I^* \right)$. ■

3.3 Penentuan Basic Reproduction Number R_0

Analisa stabilitas titik ekuilibrium pada model *SVIR* tersebut bergantung pada nilai *basic reproduction number* R_0 , yaitu banyaknya individu yang rentan yang kemudian terinfeksi jika berinteraksi dengan penderita pada populasi yang seluruhnya rentan. Penentuan bilangan ini dilakukan secara sederhana pada keadaan titik ekuilibrium endemik.

Perhatikan persamaan : $A_1 I^2 + A_2 I + A_3(1 - C) = 0$, dengan

$$A_1 = (\gamma + \mu)(\beta_1\beta) > 0, A_2 = (\gamma + \mu)[(\alpha + \mu)\beta_1 + (\gamma_1 + \mu)\beta] - \beta_1\beta\mu, A_3 = (\gamma + \mu)(\alpha + \mu)(\gamma_1 + \mu) > 0, C = \frac{\beta\mu}{(\alpha+\mu)(\gamma+\mu)} + \frac{\alpha\beta_1\mu}{(\alpha+\mu)(\gamma+\mu)(\mu+\gamma_1)} > 0.$$

Akar-akar persamaan diatas adalah :

$$I_{12}^* = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_1 A_3(1-C)}}{2A_1}, \text{ titik ekuilibrium endemik hanya dibutuhkan akar } I^* \text{ yang positif,}$$

yang hanya dipenuhi saat $C > 1$ atau $\frac{\beta\mu}{(\alpha+\mu)(\gamma+\mu)} + \frac{\alpha\beta_1\mu}{(\alpha+\mu)(\gamma+\mu)(\mu+\gamma_1)} > 1$.

Jadi dapat disimpulkan bahwa nilai penentu eksistensi dari titik ekuilibrium endemik positif terletak pada nilai C , sehingga dapat di definisikan nilai *basic reproduction number* yaitu:

$$R_0 = C = \frac{\beta\mu}{(\alpha+\mu)(\gamma+\mu)} + \frac{\alpha\beta_1\mu}{(\alpha+\mu)(\gamma+\mu)(\mu+\gamma_1)}.$$

3.4 Analisis Kestabilan Lokal Titik Ekuilibrium

Berikut akan ditentukan kestabilan titik ekuilibrium model *SVIR* disekitar titik ekuilibrium bebas penyakit dan disekitar titik ekuilibrium endemik. Ketiga Persamaan (4)-(6) merupakan persamaan nonlinear, sehingga dengan menggunakan deret Taylor di setiap titik ekuilibriumnya akan diperoleh sistem persamaan diferensial linear.

Teorema 2

Didefinisikan $R_0 = \frac{\beta\mu}{(\alpha+\mu)(\gamma+\mu)} + \frac{\alpha\beta_1\mu}{(\alpha+\mu)(\gamma+\mu)(\mu+\gamma_1)}$, maka :

- (1) Titik ekuilibrium bebas penyakit E_0 selalu eksis untuk sebarang keadaan R_0 , sedangkan titik ekuilibrium endemik E^* ada jika $R_0 > 1$ dan tunggal.
- (2) Jika $R_0 < 1$, maka titik ekuilibrium E_0 bersifat stabil asimtotik lokal ; dan
Jika $R_0 > 1$, maka titik ekilibrium E_0 bersifat tidak stabil.

(3) Jika $R_0 > 1$, maka titik ekuilibrium endemik E^* bersifat stabil asimtotik lokal

Bukti:

(1) Eksistensi titik ekuilibrium bebas penyakit telah terlihat saat penentuan titik ekuilibrium sebelumnya, yang mana hanya diperoleh satu titik ekuilibrium saat $I = 0$ dan tidak dipengaruhi oleh sebarang keadaan R_0 (bukti trivial). Selanjutnya, perhatikan kembali persamaan : $A_1 I^2 + A_2 I + A_3(1 - R_0) = 0$, ketika $R_0 > 1$, maka diperoleh $A_3(1 - R_0) < 0$ dan $A_1 > 0$, yang berakibat persamaan tersebut mempunyai dua akar real, yang berlawanan tanda (positif dan negatif). Oleh karena itu, syarat perlu untuk menjamin eksistensi dan ketunggalan ekuilibrium E^* telah terpenuhi. Sebagai tambahan, akan ditunjukkan bahwa persamaan kuadrat diatas tidak mempunyai akar positif jika $R_0 \leq 1$. Perhatikan bahwa :

$R_0 \leq 1$ sehingga $\beta\mu \leq (\alpha + \mu)(\gamma + \mu)$ maka

$$A_2 \geq (\gamma + \mu)[(\alpha + \mu)\beta_1 + (\gamma_1 + \mu)\beta] - \beta_1(\alpha + \mu)(\gamma + \mu) > (\gamma_1 + \mu)(\gamma + \mu)\beta > 0$$

Oleh karena, $A_1 > 0$, $A_3(1 - R_0) > 0$, maka fungsi $A_1 I^2 + A_2 I + A_3(1 - R_0)$ naik dan $A_1 I^2 + A_2 I + A_3(1 - R_0) > A_3(1 - R_0) \geq 0$, untuk $I > 0$, yang berarti bahwa fungsi kuadrat tersebut tidak mempunyai akar yang positif. ■

(2) Misalkan : $f_1 = \mu - \mu S - \beta SI - \alpha S$, $f_2 = \alpha S - \beta_1 VI - \gamma_1 V - \mu V$,
 $f_3 = \beta SI + \beta_1 VI - \gamma I - \mu I$, maka matriks Jacobian dari bentuk sistem diatas dengan $\underline{f} = (f_1, f_2, f_3)$ adalah :

$$J(\underline{f}) = \begin{pmatrix} -\mu - \alpha - \beta I & 0 & -\beta S \\ \alpha & -\mu - \gamma_1 - \beta_1 I & -\beta_1 V \\ \beta I & \beta_1 I & \beta S + \beta_1 V - \mu - \gamma \end{pmatrix}$$

sehingga matriks jacobian disekitar titik $E_0 = (S_0, V_0, I_0) = (\frac{\mu}{\alpha + \mu}, \frac{\alpha\mu}{(\alpha + \mu)(\gamma_1 + \mu)}, 0)$ adalah:

$$J(\underline{f}) = \begin{pmatrix} -\mu - \alpha & 0 & -\beta S_0 \\ \alpha & -\mu - \gamma_1 & -\beta_1 V_0 \\ 0 & 0 & \beta S_0 + \beta_1 V_0 - \mu - \gamma \end{pmatrix}$$

Nilai eigennya diperoleh saat $|J - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow$

$$\begin{vmatrix} -\mu - \alpha - \lambda & 0 & -\beta S_0 \\ \alpha & -\mu - \gamma_1 - \lambda & -\beta_1 V_0 \\ 0 & 0 & \beta S_0 + \beta_1 V_0 - \mu - \gamma - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

sehingga persamaan karakteristiknya adalah :

$$[-(\mu + \alpha) - \lambda] \cdot [-(\mu + \gamma_1) - \lambda] \cdot [\beta S_0 + \beta_1 V_0 - \mu - \gamma - \lambda] = 0.$$

Diperoleh : $\lambda_1 = -(\mu + \alpha) < 0$, $\lambda_2 = -(\mu + \gamma_1) < 0$, $\lambda_3 = \beta S_0 + \beta_1 V_0 - \mu - \gamma = (\gamma + \mu)(R_0 - 1)$. Terlihat bahwa saat $R_0 < 1$ maka seluruh nilai eigen dari $J(\underline{f})$ bernilai negatif yang berakibat titik E_0 bersifat stabil asimtotik lokal. Sedangkan saat $R_0 > 1$, terdapat satu nilai eigen yang bernilai positif sehingga menurut teorema kestabilan dari sistem linear titik E_0 bersifat tidak stabil. ■

(3) Jelas bahwa titik endemik E^* eksis saat $R_0 > 1$, sehingga matriks Jacobian di sekitar titik $E^* = (S^*, V^*, I^*)$ adalah:

$$J(\underline{f}^*) = \begin{pmatrix} -\mu - \alpha - \beta I^* & 0 & -\beta S \\ \alpha & -\mu - \gamma_1 - \beta_1 I^* & -\beta_1 V \\ \beta I^* & \beta_1 I^* & \beta S^* + \beta_1 V^* - \mu - \gamma \end{pmatrix}$$

Perhatikan bahwa entri ke a_{11}, a_{22}, a_{33} , dari matriks di atas dapat dimodifikasi menjadi :

$-\mu - \gamma_1 - \beta_1 I^* = -\frac{\alpha S^*}{V^*}$, dan berdasarkan hasil evaluasi disekitar titik ekuilibrium endemik diperoleh $\beta S^* + \beta_1 V^* - \mu - \gamma = 0$, sehingga matriks di atas menjadi:

$$J(\underline{f}^*) = \begin{pmatrix} -\frac{\mu}{S^*} & 0 & -\beta S^* \\ \alpha & -\frac{\alpha S^*}{V^*} & -\beta_1 V^* \\ \beta I^* & \beta_1 I^* & 0 \end{pmatrix}$$

Persamaan karakteristik dari matriks $J(\underline{f}^*)$ diperoleh hanya saat : $|J - \lambda I| = 0$, maka

$$\begin{vmatrix} -\frac{\mu}{S^*} - \lambda & 0 & -\beta S^* \\ \alpha & -\frac{\alpha S^*}{V^*} - \lambda & -\beta_1 V^* \\ \beta I^* & \beta_1 I^* & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-\frac{\mu}{S^*} - \lambda)[(-\frac{\alpha S^*}{V^*} - \lambda)(-\lambda) + (\beta_1 V^*)(\beta_1 I^*)] + (-\beta S^*)(\alpha \beta_1 I^*) - (-\frac{\alpha S^*}{V^*} - \lambda)(\beta I^*) = 0$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristik : $\lambda^3 + a_1 \lambda^2 + a_2 \lambda + a_3 = 0$, dengan:

$$a_1 = \frac{\mu}{S^*} + \frac{\alpha S^*}{V^*} > 0, a_2 = \frac{\alpha S^*}{V^*} + \beta_1^2 V^* I^* + \beta^2 S^* I^* > 0, a_3 = \alpha \beta_1 \beta S^* I^* + \frac{\alpha \beta^2 S^{*2} I^*}{V^*} + \frac{\mu \beta_1^2 V^* I^*}{S^*} > 0.$$

Karena $a_1 a_2 - a_3 = \frac{\mu}{S^*} \left(\frac{\alpha \mu}{V^*} + \beta^2 S^* I^* \right) + \frac{\alpha S^*}{V^*} \left(\frac{\alpha \mu}{V^*} + \beta_1^2 V^* I^* \right) - \alpha \beta_1 \beta S^* I^*$

$$= \frac{\alpha \mu^2}{S^* V^*} + (\mu + \beta I^*) \beta^2 S^* I^* + \frac{\alpha^2 \mu S^*}{V^{*2}} + \alpha I^* S^* (\beta - \beta_1)^2 + \alpha \beta_1 \beta S^* I^* > 0$$

dipenuhi, maka menurut kriteria Routh-Hurwitz, menjamin seluruh nilai eigen persamaan karakteristik di atas mempunyai bagian real yang negatif, sehingga titik ekuilibrium $E^* = (S^*, V^*, I^*)$ bersifat stabil asimtotik lokal. ■

Berdasarkan hasil yang telah diperoleh maka dapat dilakukan interpretasi secara biologis sebagai berikut :

- (1) Jika jumlah individu yang rentan, terinfeksi, dan terinfeksi saat $t = t_0$ berada pada persekitaran nilai $E_0 = (S_0, V_0, I_0)$ dengan $R_0 < 1$, maka setiap interaksi dengan individu yang terinfeksi yang tidak cukup kuat untuk menginfeksi individu yang rentan ataupun terinfeksi, maka penyebaran penyakit tersebut tidak akan mewabah dan cenderung menghilang untuk $t \rightarrow \infty$. Kondisi ini yang kemudian dinamakan stabil asimtotik disekitar titik ekuilibrium $E_0 = (S_0, V_0, I_0)$ dengan $R_0 < 1$, yang kemudian titik ini disebut juga sebagai titik ekuilibrium bebas penyakit.
- (2) Jika jumlah individu yang rentan, terinfeksi, dan terinfeksi saat $t = t_0$ berada pada persekitaran nilai $E^* = (S^*, V^*, I^*)$ dengan $R_0 > 1$, maka berarti penyakit akan mewabah tetapi tidak mencapai kepunahan. Jumlah individu yang rentan, yang terinfeksi, dan yang terinfeksi akan bergerak menuju nilai $E^* = (S^*, V^*, I^*)$ untuk $t \rightarrow \infty$. Kondisi ini yang kemudian dinamakan stabil asimtotik disekitar titik ekuilibrium $E^* = (S^*, V^*, I^*)$ dengan $R_0 > 1$, yang kemudian titik ini disebut juga sebagai titik ekuilibrium endemik.

3.4 Analisis Kestabilan Global Titik Ekuilibrium

Teorema 3

Didefinisikan : $R_0 = \frac{\beta \mu}{(\alpha + \mu)(\gamma + \mu)} + \frac{\alpha \beta_1 \mu}{(\alpha + \mu)(\gamma + \mu)(\mu + \gamma_1)}$, maka :

- (1) Jika $R_0 \leq 1$, maka titik ekuilibrium E_0 bersifat stabil asimtotik global
- (2) Jika $R_0 > 1$, maka titik ekuilibrium endemik E^* bersifat stabil asimtotik global.

Bukti:

(1) Untuk kestabilan Global E_0 dengan syarat $R_0 \leq 1$

Diberikan fungsi Lyapunov : $G = S - S_0 - S_0 \ln \frac{S}{S_0} + V - V_0 - V_0 \ln \frac{V}{V_0} + I$

dengan domain $D = \{(S, V, I) \in \mathbb{R}_+^3 \mid S + V + I \leq 1, \forall t > t_0, S_0 \neq 0, V_0 \neq 0, I_0 \neq 0\}$

Perhatikan bahwa fungsi G memenuhi 3 syarat berikut :

- 1) $G \in C^1(D)$, karena fungsi G diferensiabel kontinu di $D \subset \mathbb{R}_+^3$

2) Selanjutnya derivatif parsial dari fungsi G terhadap waktu, memenuhi :

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial t} &= \frac{\partial G}{\partial S} \cdot \frac{dS}{dt} + \frac{\partial G}{\partial V} \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{\partial G}{\partial I} \cdot \frac{dI}{dt} \\ \frac{\partial G}{\partial t} &= (1 - \frac{S_0}{S})(\mu - \mu S - \beta SI - \alpha S) + (1 - \frac{V_0}{V})(\alpha S - \beta_1 VI - \gamma_1 V - \mu V) + \beta SI + \beta_1 VI - \gamma I - \mu I \\ &= \mu - \mu S - \mu V - \mu I - \gamma_1 V - \gamma I + S_0 \frac{\mu}{S} + \mu S_0 + \beta S_0 + \alpha S_0 - \alpha \frac{SV_0}{V} + \beta_1 V_0 I + \gamma_1 V_0 + \mu V_0 \\ &= \mu S - \alpha \frac{S_0 V}{V_0} + 2\mu S_0 + 3\alpha S_0 - \frac{S_0}{S}(\mu S_0 + \alpha S_0) - \alpha \frac{SV_0}{V} - (\mu + \gamma - \beta S_0 - \beta_1 V_0)I \\ &= -\mu S_0(\frac{S_0}{S} + \frac{S}{S_0} - 2) - \alpha S_0(\frac{V_0}{V} + \frac{S_0}{S} + \frac{SV_0}{S_0 V} - 3) - (\mu + \gamma)(1 - R_0)I\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa dalam persamaan di atas digunakan fakta bahwa persamaan $\mu + \gamma_1 = \alpha \frac{S_0}{V_0}$ dan $\mu S_0 + \alpha S_0$. Selanjutnya, karena rata-rata aritmetik lebih besar atau sama dengan rata-rata geometrik, maka diperoleh $\frac{S_0}{S} + \frac{S}{S_0} - 2 \geq 0$, $\frac{V_0}{V} + \frac{S_0}{S} + \frac{SV_0}{S_0 V} - 3 \geq 0$, dan ketaksamaan yang diinginkan hanya akan dipenuhi jika hanya jika $S_0 = S$ dan $V_0 = V$, dan karena $R_0 \leq 1$, maka jelas berakibat :

$$\frac{\partial G}{\partial t} = -\mu S_0 \left(\frac{S_0}{S} + \frac{S}{S_0} - 2 \right) - \alpha S_0 \left(\frac{V_0}{V} + \frac{S_0}{S} + \frac{SV_0}{S_0 V} - 3 \right) - (\mu + \gamma)(1 - R_0)I \leq 0$$

Jadi, diperoleh : $\frac{\partial G}{\partial t} \leq 0$

3) Lebih lanjut, karena

$S = \left\{ (S, V, I) \in D \mid \frac{\partial G}{\partial t} = 0 \right\} \Leftrightarrow S = \{ (S, V, I) \in D \mid S_0 = S, V_0 = V \}$, hanya memuat titik ekuilibrium E_0 , maka menurut teorema La-Salle, titik ekuilibrium E_0 adalah stabil asimtotik global. ■

(2) Selanjutnya, untuk kestabilan Global E^* dengan syarat $R_0 > 1$

Diberikan fungsi Lyapunov :

$$G^* = S - S^* - S^* \ln \frac{S}{S^*} + V - V^* - V^* \ln \frac{V}{V^*} + I - I^* - I^* \ln \frac{I}{I^*}$$

Perhatikan bahwa fungsi G^* memenuhi syarat-syarat berikut :

1) $G^* \in C^1(D)$, karena fungsi G^* diferensiabel kontinu di $D \subset R_+^3$

$$\begin{aligned}2) \frac{\partial G}{\partial t} &= \frac{\partial G}{\partial S} \cdot \frac{dS}{dt} + \frac{\partial G}{\partial V} \cdot \frac{dV}{dt} + \frac{\partial G}{\partial I} \cdot \frac{dI}{dt} \\ \frac{\partial G}{\partial t} &= (1 - \frac{S^*}{S})(\mu - \mu S - \beta SI - \alpha S) + (1 - \frac{V^*}{V})(\alpha S - \beta_1 VI - \gamma_1 V - \mu V) + \\ &\quad (1 - \frac{I^*}{I})(\beta SI + \beta_1 VI - \gamma I - \mu I) \\ &= \mu - \mu S - (\mu + \gamma_1)V - (\mu + \gamma)I - \mu \frac{S^*}{S} + \mu S^* + \beta S^* I + \alpha S^* - \alpha \frac{SV^*}{V} \\ &\quad + \beta_1 V^* I + (\gamma_1 + \mu)V^* - \beta SI^* - \beta_1 VI^* + (\mu + \gamma)I^* \\ &= 2\mu - \mu S - \frac{\alpha S^* - \beta_1 V^* I^*}{V^*} V - (\mu S^* + \beta S^* I^* + \alpha S^*) \frac{S^*}{S} - \alpha S^* \\ &\quad - \alpha S \frac{V^*}{V} - \beta SI^* - \beta_1 VI^*\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial t} &= 2(\mu S^* + \beta S^* I^* + \alpha S^*) - \mu S - \frac{\alpha S^* V}{V^*} + \alpha S^* - \frac{\mu S^{*2}}{S} - \frac{\beta S^{*2} I^*}{S} - \alpha \frac{S^{*2}}{S} - \alpha \frac{V^* S}{V} - \beta S I^* \\ &= -(\mu S^* + \beta S^* I^*) \left(\frac{S}{S^*} + \frac{S^*}{S} - 2 \right) - \alpha S^* \left(\frac{V}{V^*} + \frac{S^*}{S} + \frac{S V^*}{S^* V} - 3 \right) \leq 0\end{aligned}$$

Dalam persamaan di atas, digunakan pula fakta bahwa persamaan $\mu + \gamma = \beta S^* + \beta_1 V^*$ dan

$$\mu + \gamma_1 = \frac{\alpha S^* - \beta_1 V^* I^*}{V^*}, \text{ serta } \mu = \mu S^* + (\mu + \gamma_1) V^* + (\mu + \gamma) I^*.$$

Selanjutnya, berdasarkan rata-rata geometrik dan aritmetik, maka diperoleh pula: $\frac{S}{S^*} + \frac{S^*}{S} - 2 \geq 0$,

$$\frac{V}{V^*} + \frac{S^*}{S} + \frac{S V^*}{S^* V} - 3 \geq 0.$$

Lebih lanjut perhatikan pula bahwa, kondisi $\frac{\partial G}{\partial t} = 0$ tersebut hanya akan dipenuhi jika hanya jika $S^* = S$ dan $V^* = V$.

3) Dengan membentuk himpunan invariant :

$S = \{(S, V, I) \in D \mid \frac{\partial G}{\partial t} = 0\} \Leftrightarrow S = \{(S, V, I) \in D \mid S^* = S, V^* = V\}$, memperlihatkan bahwa himpunan S hanya memuat titik ekuilibrium E^* , maka menurut teorema La-Salle, titik ekuilibrium E^* adalah stabil asimtotik global. ■

4. KESIMPULAN

Dalam tulisan ini dianalisis pengaruh kontrol vaksinasi terhadap model epidemik SIR sehingga dibentuk model $SVIR$. Sebagai hasil analisis kesetimbangan model ini diperoleh dua titik ekuilibrium, dimana kedua titik ekuilibrium ini dihasilkan dari dua buah kondisi yang berbeda.

Titik ekuilibrium pertama untuk model $SVIR$ adalah :

$$E_0 = (S_0, V_0, I_0) = \left(\frac{\mu}{\alpha + \mu}, \frac{\alpha \mu}{(\alpha + \mu)(\gamma_1 + \mu)}, 0 \right),$$

yang diperoleh pada kondisi bebas penyakit ($I=0$). Sedangkan titik ekuilibrium kedua yaitu

$$E^* = (S^*, V^*, I^*) = \left(\frac{\mu}{\alpha + \mu + \beta I^*}, \frac{\alpha \mu}{(\alpha + \mu + \beta I^*)(\gamma_1 + \mu + \beta_1 I^*)}, I^* \right)$$

dengan I^* berupa suatu akar positif dari persamaan karakteristik $A_1 I^{*2} + A_2 I^* + A_3(1 - R_0) = 0$

saat $I \neq 0$ dengan syarat perlu $R_0 > 1$.

Berdasarkan hasil analisis eksistensi titik ekuilibrium endemik menghasilkan bilangan

$$R_0 = \frac{\beta \mu}{(\alpha + \mu)(\gamma + \mu)} + \frac{\alpha \mu \beta_1}{(\alpha + \mu)(\gamma + \mu)(\mu + \gamma_1)},$$

yang merupakan syarat perlu dari eksistensi titik tersebut. Lebih lanjut, pada analisis kestabilan titik ekuilibrium endemik tersebut, bilangan R_0 ini menentukan pula kestabilan asimtotik lokal maupun global dari titik tersebut.

Hasil analisis kestabilan pada kondisi bebas penyakit memperlihatkan bahwa saat $R_0 > 1$ maka titik ekuilibrium E_0 tidak stabil, dan saat $R_0 < 1$ titik E_0 bersifat stabil asimtotik global. Interpretasi biologis dari hasil tersebut adalah jika terjadi kondisi seperti itu, dimana proporsi awal untuk setiap kelas adalah S_0, V_0 , dan I_0 , selama memenuhi syarat $R_0 < 1$, maka dalam waktu yang cukup lama tidak akan terjadi penyebaran penyakit pada subpopulasi rentan dan terinfeksi, atau dengan kata lain tidak ada individu yang akan masuk ke subpopulasi terinfeksi. Begitupula pada saat terjadi penyebaran penyakit ($I \neq 0$), maka titik ekuilibrium E^*

bersifat stabil asimtotik global saat $R_0 > 1$, yang berarti bahwa dengan kondisi proporsi masing-masing kelas yang S^*, V^* , dan I^* yang seperti demikian dalam waktu yang cukup lama, maka penyakit akan selalu ada dalam populasi tersebut akan selalu ada individu yang masuk ke subpopulasi terinfeksi.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] Diekmann, O., dan Heesterbeek, J. A. P., 2000. *Mathematical Epidemiology of Infectious Diseases : Model Building, Analysis and interpretation*. John Wiley and Sons, Chichester.
- [2] Jung, Lenhart dan Feng, 2002, *Optimal Control Of Treatments in A Two-Strain Tuberculosis Model*, Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B, **2 (4)**, 473 – 482.
- [3] McCluskey, C. C., 2006, Lyapunov Functions for Tuberculosis Models with Fast and Slow Progression, *Mathematical Biosciences and Engineering*, **3(4)**.
- [4] Olsder, G. J., 1994. *Mathematical System Theory*. Delftse Uitgevers Maatschappij, Netherlands.
- [5] Perko, S., 2001. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Text in Applied Mathematics Vol 7, Springer-Verlag, New York, USA.